「令和4年度 入学試験問題 教員養成課程　数 学　解答例及び採点基準」

問題1（配点70点）

出題の意図・採点基準

2次方程式に関する知識・技能の習熟度や漸化式の応用力について問う。

各問いの採点においては, 計算や論証の過程, 記述が数学的に正しく題意に沿っていれば, 完全な解答でなくとも適宜部分点を与えて評価する。なお, 以下に示す解答例はあくまで一例にすぎない。

(1) の解答例

解と係数の関係から $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$ であり, $a_1=\alpha+\beta=1$, および

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3,\\
a_3 &= \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4
\end{aligned}
$$

となる。

(2) の解答例

各自然数 n について

$$
\begin{aligned}
a_{n+2}-a_{n+1}-a_n &= (\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})-(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-(\alpha^n+\beta^n)\\
&= (\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}-\alpha^n)+(\beta^{n+2}-\beta^{n+1}-\beta^n)\\
&= \alpha^n(\alpha^2-\alpha-1)+\beta^n(\beta^2-\beta-1)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

がわかる。

あるいは

$$
\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha^{n+1}\beta-\alpha\beta^{n+1}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)
$$

より $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0\ (n=1,2,3,\ldots)$ が成り立つことがわかる。

a_1 と a_2 は正の整数であり, $a_3=a_2+a_1$ より a_3 も正の整数となる。
同様に, a_{n-2} と a_{n-1} が正の整数ならば $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ より a_n も正の整数となる。
このように, 次々と a_n は正の整数であることがわかる。

(3) の解答例

$b_1=1$, $b_2=3$, $b_3=4$, $b_4=7$, $b_5=1\ (a_5=11)$ である。この計算に十の位にあがった数は関係しない。
$b_6=8$, $b_7=9$, $b_8=7$, $b_9=6$, $b_{10}=3$, $b_{11}=9$, $b_{12}=2$, $b_{13}=1$, $b_{14}=3$ となる。
ここで $b_1=1$, $b_2=3$ から始まる繰り返しに戻るので, 周期は 12 である。
$2022=12\times168+6$ より, $b_{2022}=b_6=8$ となる。

問題2 （配点70点）

出題の意図・採点基準

2次関数のグラフ, 接線, 2直線が直交するときの傾きに関する条件などの基礎的な理解を問う。また, 2次関数の定積分や扇形の面積を利用して, 与えられた図形の面積を求めることができるかを問う。

各問いの採点においては, 計算や論証の過程, 記述が数学的に正しく題意に沿っていれば, 完全な解答でなくとも適宜部分点を与えて評価する。なお, 以下に示す解答例はあくまで一例にすぎない。

(1) の解答例

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ を x で微分すると $y' = \sqrt{3}x$ となり, $x = 1$ での接線の傾きは $\sqrt{3}$, 直交する直線の傾きは $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。

したがって, 直線 ℓ の方程式は $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, すなわち $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$ となる。

(2) の解答例

ℓ と x 軸との交点の x 座標は, (1) で求めた方程式で $y = 0$ と置き, $x = \dfrac{5}{2}$ と求められる。

したがって, 円 C_2 の中心は $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$ であり, 半径は, 三平方の定理より

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

と計算できる。

(3) の解答例

直線 $x = 1$ と ℓ, および x 軸で囲まれた三角形の面積を S_1 とおく。$S_1 = \left(\dfrac{5}{2} - 1\right) \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ となる。

円 C_2 を ℓ と x 軸で切り取って得られる小さい方の扇形の面積を S_2 とおく。

C_2 で囲まれた円の面積は 3π であり, ℓ と x 軸とのなす角は 30° であることから, $S_2 = 3\pi \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{\pi}{4}$ となる。

したがって, 求めたい面積は

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 dx + S_1 - S_2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}x^3\right]_0^1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\sqrt{3}}{24} - \frac{\pi}{4}$$

である。

問題3（配点60点）

出題の意図・採点基準

三角比の定義を理解し, 加法定理などの公式の応用力を問う。また, 背理法を使った論証力をみる。

各問いの採点においては, 計算や論証の過程, 記述が数学的に正しく題意に沿っていれば, 完全な解答でなくとも適宜部分点を与えて評価する。なお, 以下に示す解答例はあくまで一例にすぎない。

(1) の解答例

加法定理 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ において, 仮定より右辺は有理数である。

(2) の解答例

$\tan 10^\circ$ を有理数と仮定する。

(1) より $\tan 20^\circ=\tan(10^\circ+10^\circ)$ は有理数であり, $\tan 30^\circ=\tan(20^\circ+10^\circ)$ も有理数である。

ところが, $\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ は無理数だから, 矛盾である。よって $\tan 10^\circ$ は無理数である。

(3) の解答例

直角三角形 ABC において $\angle\mathrm{C}=90^\circ$, $\angle\mathrm{A}=\alpha$ とするとき, $\angle\mathrm{B}=90^\circ-\alpha$ である。

鋭角の三角比の定義により

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}},\quad \tan(90^\circ-\alpha)=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$$

となり, $\tan(90^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ が成り立つ。

(4) の解答例

$\tan 8^\circ$ を有理数と仮定する。

(2) と同様にして, $\tan 80^\circ$ も有理数となる。しかし, (3) より

$$\tan 80^\circ=\tan(90^\circ-10^\circ)=\frac{1}{\tan 10^\circ}$$

であり, 右辺は (2) より無理数だから, 矛盾である。よって $\tan 8^\circ$ は無理数である。